

①

Si trovano equazioni parametriche per r $\begin{cases} x=2t \\ y=-5-5t \\ z=4+4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

a) π_λ è ortogonale a $r \Leftrightarrow (2, -5, 4) \parallel (4, -\lambda-2, -2\lambda-3) \Leftrightarrow$

$$\exists \mu \in \mathbb{R} \text{ tale che } \begin{cases} 4=2\mu \\ -\lambda-2=-5\mu \\ -2\lambda-3=4\mu \end{cases} \quad \text{Dalle prime equazioni}$$

segue $\mu=2$, con delle seconde segue $\lambda=8$ e dalle terze $\lambda=-11/2$.

Quindi il sistema non ammette soluzioni, con nessun π_λ risulta essere ortogonale ad r .

b) r include π_λ $\Leftrightarrow r$ non è parallela a $\pi_\lambda \Leftrightarrow (2, -5, 4)$ e $(4, -\lambda-2, -2\lambda-3)$ non sono ortogonali $\Leftrightarrow (2, -5, 4) \cdot (4, -\lambda-2, -2\lambda-3) \neq 0 \Leftrightarrow 6-3\lambda \neq 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{\lambda \neq 2}$

c) Per $\lambda_0=2$ si ottiene il piano $\pi_{\lambda_0}: 4x-4y-7z-7=0$ ed allora

$$\boxed{d(r, \pi_{\lambda_0})} = d((0, -5, 4), \pi_{\lambda_0}) = \frac{|20-28-7|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{81}} = \boxed{5/3}.$$

Il generico piano per r ha equazione

$$(5\alpha+2\beta)x + 2\alpha y - \beta z + 2(5\alpha+2\beta) = 0$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Esso risulta ortogonale a π_{λ_0} se e solo se

$$(5\alpha+2\beta, 2\alpha, -\beta) \cdot (4, -4, -7) = 0 \quad \text{cioè se e solo se } 4\alpha+5\beta=0.$$

Scegli $\alpha=5$ e $\beta=-4$, si ottiene il piano

$$\boxed{\sigma: 17x+10y+4z+34=0}.$$

②

a) In un intorno di $(0,0)$ $\begin{cases} \text{se } x=y^2 \\ \text{se } y=0 \end{cases}$ la f diviene $= \begin{cases} \frac{y^4-y^2}{y^2} = y^2-1 \\ \frac{x^2}{x} = x \end{cases}$

corrisponde nel primo caso $f(x,y)$ tende a -1 , mentre nel secondo caso tende a 0 . Ciò dimostra che non esiste il limite $f(P)$ per $P \rightarrow (0,0)$.

$$b) \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x - \frac{y^2}{x}) = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (x - \frac{y^2}{x}) = -2y/x$$

Si osserva dunque che f è di classe C^1 per $n \neq 0$, in particolare in un opportuno intorno di $P_0 = (1, 1)$. Ciò implica la differenziabilità di f in P_0 , ed esiste dunque piano tangente al grafico di f sopra P_0 , la cui equazione è data da

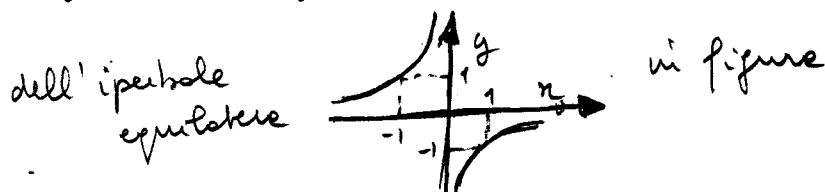
$$z = f(P_0) + \frac{\partial f}{\partial n}(n - n_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y - y_0) = 0 + 2(n-1) - 2(y-1)$$

ossia $\boxed{z = 2n - 2y}$.

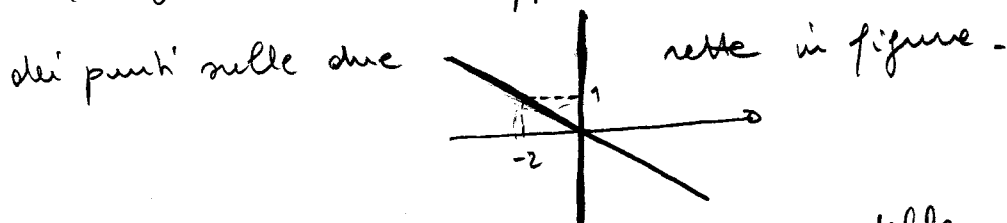
③ a) Si ottiene $\frac{\partial f}{\partial n} = e^{ny+y^2}(1+ny)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{ny+y^2}n(n+2y)$, con

$\nabla f = e^{ny+y^2}(1+ny, n(n+2y))$. In particolare:

$\nabla f \parallel \text{asse } y \Leftrightarrow 1+ny=0 \Leftrightarrow y = -1/n$: si tratta dei punti



$\nabla f \parallel \text{asse } n \Leftrightarrow n(n+2y)=0 \Leftrightarrow n=0$ oppure $n+2y=0$: si tratta



b) I punti critici di f sono costituiti dalle intersezioni delle due figure di sopra, cioè dalle soluzioni del sistema

$\nabla f = 0$ cioè $\begin{cases} 1+ny=0 \\ n(n+2y)=0 \end{cases}$

ossia $\boxed{\begin{matrix} P_1 = (\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \\ P_2 = (-\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \end{matrix}}$.

Calcoliamo le matrici hessiane $H_f(P_1)$ e $H_f(P_2)$. Per far ciò, troveremo dapprima

$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} = e^{ny+y^2}y(2+ny)$ con $\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(P_1) = -\frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial n^2}(P_2) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}$

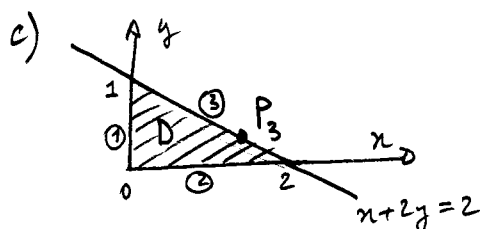
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{ny+y^2}n((n+2y)^2+2)$ con $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = 2\sqrt{2}e^{-1/2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) = -2\sqrt{2}e^{-1/2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy+y^2} (2x+2y+2xy^2+x^2y) \quad \text{con} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) = \sqrt{2}e^{-1/2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) = -\sqrt{2}e^{-1/2}$$

In definitiva $H_f(P_1) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $H_f(P_2) = e^{-1/2} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$

sono entrambe matrici simmetriche indefinite, per cui

P_1 e P_2 sono entrambi punti di flesso.



$$\partial D = ① \cup ② \cup ③$$

$$f|_{①} = 0$$

$$f|_{②} = x$$

Studiamo il comportamento di $f|_{③}$ con il metodo di

lagrange:

$$\begin{cases} \det \begin{pmatrix} e^{xy+y^2}(1+xy) & e^{xy+y^2}x/(x+2y) \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \\ x+2y=2, \quad x \in [0,2] \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(1+xy) + x(x+2y) = 0 \\ x+2y=2, \quad x \in [0,2] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ y=1-x/2 \\ x \in [0,2] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1-1/\sqrt{2} \end{cases}$$

e si ottiene con il punto critico $P_3 = (\sqrt{2}, 1-1/\sqrt{2})$ in ③.

Riassumendo, i punti critici sulla frontiera ∂D sono

$(0,0) \rightarrow f(0,0) = 0$
$(0,1) \rightarrow f(0,1) = 0$
$(2,0) \rightarrow f(2,0) = 2$
$P_3 \rightarrow f(P_3) = \sqrt{2}e$

ove $0 < 2 < \sqrt{2}e$.

Inoltre i punti critici P_1 e P_2 di f non cadono all'interno di D .

In definitiva ① è costituito tutto di punti di minimo (con $\min f|_D = 0$) e $P_3 = (\sqrt{2}, 1-1/\sqrt{2})$ è punto di massimo, (con $\max f|_D = \sqrt{2}e$).